BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 **Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası** **2010**

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ФАБЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

М.А.ТАГИЕВА
Бакинский Государственный Университет
mtagiyeva@mail.ru

В работе рассмотрены свойства обобщенного оператора Фабера в пространстве функций, голоморфных в единичном круге и имеющих определенное поведение на границе единичного круга. Даны применения этих свойств в теории приближения обобщенных аналитических функций обобщенными полиномами в односвязной области.

Введем обозначения. G – конечная односвязная область, ограниченная кривой Γ; $D = \overline{C} \setminus \overline{G}$; $\eta = \hat{O}(\mathrm{z})$ - функция, отображающая область D конформно и однолистно на область $\{|\eta| > 1\}$ при условиях $\hat{O}(\infty) = \infty$, $\hat{O}'(\infty) > 0$; $z = \psi(\eta)$ –обратная функция; Γ –кривая Альпера. Это усиленно гладкая жорданова кривая, для которой $0 < c_1 < |\psi'(\eta)| < c_2 < \infty$ при $|\eta| \geq 1$. $U_{p,2}(A,B,G)$ – класс регулярных решений уравнения

$$\partial_{\bar{z}} w + Aw + B\overline{w} = 0 \tag{1}$$

в области G, называемых обобщенными аналитическими функциями (о.а.ф.), $A, B \in L_{p,2}(C)$, $L_{p,2}(C)$ - пространство функций f, заданных в C и удовлетворяющих условиям

$$f \in L_p(\{|z| < 1\}), \;\; f_2(z) = |z|^{-2} f\left(\frac{1}{z}\right) \in L_p(\{|z| < 1\}), \;\; p > 2 .$$

Уравнение (1) сохраняет свой вид при конформных отображениях области: если $w(z) \in \cup_{p,2}(A,B,G_z)$, то $w(\eta) \in W(\varphi(\eta)) \subset \cup_{p,2}(A_0,B_0,G_\eta)$, где A_0, B_0 -образы A, B при конформном отображении $z = \varphi(\eta)$ области G_z на область G_η [1]. G_A $(|t| \leq 1)$ - класс функций, голоморфных в единичном круге и непрерывных в замкнутом круге, $G_A^{\cup_{p,2}}(\overline{G})$ - класс функций, о.а. в G и непрерывных в $\overline{G}$.

Пусть $w(\eta)$ – о.а.ф. в круге $U = \{|\eta| < 1\}$, которая имеет почти всюду на окружности $\{|\eta| = 1\}$ угловые граничные значения. Тогда функция $w(\hat{O}(z))$ интегрируема на Γ, т.е. выполнено условие

$$\int_{\Gamma} |w(\hat{O}(z))||dz| = \int_{\{|\eta|=1\}} |w(\eta)||\psi'(\eta)||d\eta| < \infty . \qquad (2)$$

В таком случае определен обобщенный оператор Фабера для области G:

$$\mathsf{F}(w)(z) = W(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\xi,G)w(\hat{O}(\xi))d\xi - \Omega_2(z,\xi,G)\overline{w(\hat{O}(\xi))d\xi},\ z \in G, \qquad (3)$$

где $\Omega_1(z,\xi,G)$ и $\Omega_2(z,\xi,G)$ - ядра, нормированные относительно области G [3].

Оператор (2) преобразует некоторое множество функций, о.а. в U в множество функций, о.а. в области G. Так как он является обобщенным интегралом типа Коши с плотностью $w(\hat{O}(z))$, то он обладает всеми свойствами обобщенного интеграла типа Коши. Отметим некоторые из них.

1. Пусть функция $w(\hat{O}(z)) \in C_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, тогда интеграл (2) принадлежит пространству $C_\beta(\overline{G})$, где $\beta = \min\left(\alpha, \dfrac{p-2}{p}\right)$, $p > 2$.
2. Обозначим

$$W_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\xi,G)w(\hat{O}(\xi))d\xi - \Omega_2(z,\xi,G)\overline{w(\hat{O}(\xi))d\xi},\ z \in D, \qquad (4)$$

(обобщенный интеграл типа Коши для $z \in D$).

Тогда для $\xi \in \Gamma$ и $w(\hat{O}(\xi)) \in C_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, имеют место формулы

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \frac{1}{2}w(\hat{O}(\xi)) + W_0(\xi), \\ W_1(\xi) &= -\frac{1}{2}w(\hat{O}(\xi)) + W_0(\xi), \end{aligned} \qquad (5)$$

где

$$W_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(\xi,t,G)w(\hat{O}(t))dt - \Omega_2(\xi,t,G)\overline{w(\hat{O}(t))dt}, \qquad (6)$$

причем первый интеграл правой части (6) понимается в смысле главного значения по Коши, а второй сходится в обычном смысле.

3. Пусть $w_k(\eta,0,1)$ - обобщенные полиномы с центром в нуле для единичного круга [1]:

$$\begin{aligned} w_{2k}(\eta,0,1) &= \hat{E}(\eta^k, \mathrm{U}), \\ w_{2k+1}(\eta,0,1) &= \hat{E}(\mathrm{i}\eta^k, \mathrm{U}), \end{aligned} \qquad (7)$$

где

$$\hat{E}(\eta^k, \mathrm{U}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|\eta|=1\}} \Omega_1(\eta,t,U)t^k dt - \Omega_2(\eta,t,U)\overline{t^k dt},$$

$$\hat{E}(i\eta^k, \mathrm{U}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|\eta|=1\}} \Omega_1(\eta,t,U)it^k dt - \Omega_2(\eta,t,U)\overline{it^k dt},$$

и ядра $\Omega_1(\eta,t,U)$, $\Omega_2(\eta,t,U)$ нормированы относительно области U.

Оператор (3) преобразует обобщенные полиномы вида

$$\sum_{k=0}^{n} c_k w_k(\eta,0.1)\,,\quad c_k \in R\,,$$

в обобщенные полиномы

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \hat{\mathrm{O}}_k(z,G)\,,$$

где $\hat{\mathrm{O}}_k(z,G)$–обобщенные полиномы Фабера для области G [2].

Для оператора (3) существует обратный оператор

$$\mathsf{F}^{-1}(W)(\eta)=w(\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|t|=1\}}\Omega_1(\eta,t,U)W(\psi(t))dt-\Omega_2(\eta,t,U)\overline{W(\psi(t))dt},\ |\eta|<1\,.(8)$$

Оператор (8) определен в пространстве функций, о.а. в области G и равномерно ограниченных там по модулю, и отображает это пространство в пространство функций, обобщенных аналитических в U. При этом имеет место

Теорема 1 [3]. Пусть $W(z)$ -о.а.ф. в области G, непрерывная в $\overline{G}$ и на границе Γ области G принадлежит классу $C_\alpha(\Gamma)$. Тогда $w(\eta)\in C_\beta(\overline{U})$, где $\beta=\min\left(\alpha,\dfrac{p-2}{p}\right),\ p>2$.

Как обобщенный интеграл типа Коши оператор (3) определен для любой суммируемой на Γ функции. В качестве такой функции возьмем функцию $f(\hat{O}(z))$, где $f(\eta)$, $\eta=\hat{O}(z)$,– функция, голоморфная в U и равномерно ограниченная там по модулю. Тогда

$$\int_\Gamma |f(\hat{O}(\xi))||d\xi| = \int_{|\tau|=1}|f(\tau)||\psi'(\tau)||d(\tau)|<\infty\,.$$

В таком случае оператор (3) примет вид

$$\mathsf{F}(f,U)=W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,\xi,G)f(\hat{O}(\xi))d\xi-\Omega_2(z,\xi,G)\overline{f(\hat{O}(\xi))d\xi},\ z\in G\,.\ (9)$$

Для $z\in D$ получим

$$W_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,\xi,G)f(\hat{O}(\xi))d\xi-\Omega_2(z,\xi,G)\overline{f(\hat{O}(\xi))d\xi}\,. \qquad (10)$$

Оператор (9) пространство $B(U)$ функций, голоморфных в U и равномерно ограниченных там по модулю, отображает в пространство $B^{U_{p,2}}(G)$ функций, о.а. в области G.

Полагая в (9) $f(\eta)=\eta^k$, получим

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,\xi,G)\hat{O}^k(\xi)d\xi-\Omega_2(z,\xi,G)\overline{\hat{O}^k(\xi)d\xi}=\hat{\mathrm{O}}_{2k}(z,G).$$

Если $f(\eta)=i\eta^k$, то

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,\xi,G)i\hat{O}^k(\xi)d\xi-\Omega_2(z,\xi,G)\overline{i\hat{O}^k(\xi)d\xi}=\hat{O}_{2k+1}(z,G),$$

т.е. оператор (9) обычные степени переводит в обобщенные полиномы Фабера для области G.

Полиномы вида

$$f_n(\eta)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(c_{2k}+ic_{2k+1})\eta^k$$

по переменному η преобразуется в обобщенные полиномы

$$\sum_{k=0}^{n}c_k\hat{O}_k(z,G)$$

по переменному z, расположенные по обобщенным полиномам Фабера для области G.

Отметим, что в случае, когда $\hat{O}(z)=z$, мы получаем обобщенные полиномы (7).

Покажем, что оператор (9) ограничен в пространстве $B(U)$ и оценим его норму [4].

Беря в (5) вместо $w(\hat{O}(\xi))$ функцию $f(\hat{O}(\xi))$ и вычитая из первого равенства (5) второе, получим

$$W(\xi)=f(\hat{O}(\xi))+W_1(\xi),\ \xi\in\Gamma. \tag{11}$$

Преобразуем теперь (10), полагая $z=\psi(\eta)$, $\xi=\psi(t)$. Имеем

$$W_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,\xi,G)f(\hat{O}(\xi))d\xi-\Omega_2(z,\xi,G)\overline{f(\hat{O}(\xi))d\xi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|t|=1\}}\Omega_1(\psi(\eta),\psi(t),U)\psi'(t)f(t)dt-\Omega_2(\psi(\eta),\psi(t),U)\overline{\psi'(t)f(t)dt}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|t|=1\}}\left(\Omega_1(\psi(\eta),\psi(t),U)\psi'(t)-\frac{1}{t-\eta}\right)f(t)dt-\Omega_2(\psi(\eta),\psi(t),U)\overline{\psi'(t)f(t)dt}.$$

Обозначим

$$\Omega_1(\psi(\eta),\psi(t),U)\psi'(t)-\frac{1}{t-\eta}=F_1(\eta,t),$$

$$\Omega_2(\psi(\eta),\psi(t),U)\overline{\psi'(t)}=F_2(\eta,t).$$

Тогда $W_1(z)$ примет вид

$$W_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|t|=1\}}F_1(\eta,t)f(t)dt-F_2(\eta,t)\overline{f(t)dt}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) и полагая $\xi=\psi(t)$, получим

$$W(\psi(\eta))=f(\eta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|t|=1\}}F_1(\eta,t)f(t)dt-F_2(\eta,t)\overline{f(t)dt} \tag{13}$$

Докажем теперь ограниченность оператора (9).

В качестве нормы в пространстве $B(U)$ примем величину

$$\|f\|_B = \sup_{|t|<1} |f(t)|.$$

Тогда из формулы (13) при $|\eta| = 1$ имеем

$$|W(\psi(\eta))| \le |f(\eta)| + \frac{1}{2\pi} \int_{\{|t|=1\}} |F_1(\eta,t)||f(t)||dt| + \frac{1}{2\pi} \int_{\{|t|=1\}} |F_2(\eta,t)|\left|\overline{f(t)}\right|\left|\overline{dt}\right| \le$$

$$\le \|f\|_B \left(1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\{|t|=1\}} \left(|F_1(\eta,t)| + |F_2(\eta,t)|\right)|dt|\right). \qquad (14)$$

Так как Γ - кривая Альпера, то

$$\int_{\{|t|=1\}} \left| \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - \psi(\eta)} - \frac{1}{t-\eta} \right| |dt| < \infty,$$

[1]. Поэтому величина

$$M(\Gamma) = \max_{|\eta|=1} \frac{1}{2\pi} \int_{\{|t|=1\}} \left(|F_1(\eta,t)| + |F_2(\eta,t)|\right)|dt| < \infty.$$

Из оценки (14) получаем

$$|W(z)| \le \|f\|_B \left(1 + M(\Gamma)\right), \quad z \in \Gamma,$$

и для нормы обобщенного оператора Фабера (9) справедлива оценка

$$\|\mathsf{F}\| \le 1 + M(\Gamma). \qquad (15)$$

При условии (15) можно переносить различные результаты о приближении голоморфных функций многочленами в единичном круге на случай приближения о.а.ф. о.п. в произвольной односвязной области с достаточно гладкой границей.

Пусть $f \in C_A(U)$. Известно, что для функции $f \in C_A(U)$ существует последовательность полиномов $p_n(\eta)$, сходящаяся к $f(\eta)$ равномерно в замкнутом круге U.

Оператор (9) преобразует многочлен $p_n(\eta)$ степени n по переменному η в обобщенный полином $\mathsf{P}_n(z)$ степени n по переменному z в области G. Применяя (13), получим

$$W(z) - \mathsf{P}_n(z) = f(\eta) - \rho_n(\eta) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|t|=1\}} F_1(\eta,t)(f(t) - \rho_n(t))dt - F_2(\eta,t)(\overline{f(t) - \rho_n(\eta)})\overline{dt}. \qquad (16)$$

В классах $C_A(\overline{U})$ и $C_A^{U_{p,2}}(\overline{G})$ определим норму по формулам

$$\|f\|_C = \max_{\{|\eta|=1\}} |f(\eta)|, \quad \|W\|_C = \max_{z\in\Gamma} |W(z)|.$$

Оценивая (16), находим

$$\max_{z\in\Gamma} |W(z) - \mathsf{P}_n(z)| \le \|F\|_C \|f - p_n\|_C. \qquad (17)$$

Из (17) следует, что последовательность обобщенных полиномов $\{\mathsf{P}_n(z)\}$ сходится к о.а.ф. $W(z)$ равномерно в замкнутой области $\overline{G}$. Следовательно, функция $W(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$. Поэтому неравенство (17) можно представить в виде

$$\|W-\mathsf{P}_n\|_C \le \|F\|_C \|f-p_n\|_C. \tag{18}$$

Таким образом, если функция $f(\eta)\in H(U)$ и непрерывна в $\overline{U}$, а Γ– кривая Альпера, то интеграл (9) является функцией $W(z)$, непрерывной в $\overline{G}$.

Если $p_n(\eta)$–многочлен наилучшего равномерного приближения функции $f(\eta)$ в U, то из (18) находим

$$E_n(W,\overline{G}) \le \|F\|_C \cdot E_n(f;\overline{U}), \tag{19}$$

где $E_n(W,\overline{G})$– наилучшее равномерное приближение функции $W(z)$ порядка n в замкнутой области $\overline{G}$.

С помощью неравенств (18) и (19) можно получить некоторые оценки наилучшего равномерного приближения о.а.ф. в односвязной области.

Пусть $W(z)$ о.а.ф в области G и $W(z)\in Lip\,\alpha$, $0<\alpha<1$, для $z\in\overline{G}$.

По теореме 1 функция $w(\eta)\in Lip\,\beta$, $\beta=\min\left(\alpha,\dfrac{p-2}{p}\right)$, $p>2$, при $|\eta|\le 1$.

Функция

$$f(\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|t|=1\}}\frac{w(t)\,dt}{t-\eta}, \quad |\eta|<1,$$

голоморфна в $|\eta|<1$ и $f\in Lip\,\beta$ в $\overline{U}$.

Для наилучшего приближения $E_n(f;\overline{U})$ известна оценка.

$$E_n(f;\overline{U}) \le \frac{c_1}{n^{\beta}}. \tag{20}$$

По формуле Сохоцкого

$$w(\eta)=f^{+}(\eta)-f^{-}(\eta),\ f^{+}=f,\ f^{-}\in H\{|\eta|>1\}.$$

Полагая $\eta\in\hat{O}(\xi)$, получим

$$w(\hat{O}(\xi)=f(\hat{O}(\xi))-f^{-1}(\hat{O}(\xi)),\ \xi\in\Gamma. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (3), будем иметь

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\Omega_1(z,\xi)f(\hat{O}(\xi))d\xi-\Omega_2(z,\xi)f(\hat{O}(\xi)\,\overline{f(\hat{O}(\xi))d}\xi.$$

Теперь из (19), в силу неравенства (20), находим

$$E_n(W,\overline{G}) \le \|F\|_C\frac{c_1}{n^{\beta}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функций. М.: Наука, 1988, 512 с.
2. Тагиева М.А. О сходимости рядов по обобщенным полиномам Фабера // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2008, №3, 34-37.
3. Тагиева М.А.Об обратном обобщенном операторе Фабера // Proc. of Azerb. Math. Soc., 1994, v.1, 131-138.
4. Тагиева М.А. Оценки норм обобщенных операторов Фабера и некоторые их применения // Тезисы научной конференции, посвященной 85-летию Общенационального лидера Азербайджана Г.А.Алиева, Баку, 2008, с.102-104.

HOLOMORF FUNKSİYALAR FƏZASINDA ÜMUMİLƏŞMİŞ FABER OPERATORU

M.Ə.TAĞIYEVA

XÜLASƏ

İşdə vahid dairədə holomorf olan və vahid dairənin sərhədində özünü müəyyən cür aparan funksiyalar fəzasında ümumiləşmiş Faber operatorunun xassələrinə baxılır. Bu xassələrin ümumiləşmiş analitik funksiyalarla birrabitəli oblastlarda ümumiləşmiş çoxhədlilərlə yaxınlaşması nəzəriyyəsində tətbiqləri verilir.

FABER'S GENERALIZED OPERATOR IN THE SPACE OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

M.A.TAGIYEVA

SUMMARY

In the paper, the properties of Faber's generalized operator are considered in the space of functions that are holomorphic in a unit circle and have certain behavior on the boundary of a unit circle. The article presents the applications of these properties in the theory of approximation of generalized analytic functions by the generalized polynomials in a simply connected domain.